

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ОТРАЖЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрен численный метод определения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения. Получены результаты, показывающие сходимость метода. Представлены графики зависимости значения эффективной диэлектрической проницаемости от числа итераций.

Ключевые слова: обратная задача дифракции, эффективная диэлектрическая проницаемость, итерационный метод

Abstract. The article considers a numerical method of effective permittivity definition by the reflection coefficient. The author demonstrates the results of the method convergence and presents the figures of permittivity value dependence on the number of iterations.

Key words: inverse diffraction problem, effective permittivity, iteration method.

Введение

Настоящая работа посвящена задаче определения эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения. Рассматриваются неоднородные образцы материалов произвольной геометрической формы, помещенные в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. Задача может быть сведена к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения [1]. Данное интегральное уравнение было изучено в [2], при этом использовались результаты исследования соответствующей краевой задачи и теорема эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. В работах [3–5] была доказана теорема о существовании и единственности решений нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения и обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов. Для случая однородного тела были получены численные результаты в [6], некоторые особенности реализации численного алгоритма показаны в [7].

Данная задача может быть применена в нанотехнологии и наноэлектронике, она позволяет определять диэлектрические и магнитные параметры нанокompозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией. Ввиду композитного характера материалов при экспериментальном измерении эти параметры, как правило, труднодоступны [8, 9], что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и находить решение численно [10].

1. Постановка обратной задачи

Пусть объемное тело Q расположено в прямоугольном волноводе $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$, поверхность волновода ∂P идеально проводящая. Данное тело характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) -матрицей-функцией (тензором) ди-

электрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ представляют собой ограниченные функции в области $\bar{Q}$, $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q является кусочно-гладкой. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок волновода, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В области $P \setminus \bar{Q}$ среда является изотропной и однородной, при этом $\varepsilon_0(>0)$, $\mu_0(>0)$ являются постоянными.

Будем решать следующую задачу дифракции. Необходимо найти электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(Q)$. Данное поле возбуждается сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. При этом источником стороннего поля является электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3)$ с компактным носителем в R^3 .

Рассмотрим обобщенные решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решений (1) должны выполняться условия на бесконечности [11]: поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \sum_p R_p^{(\pm)} \exp\left(i\gamma_p^{(1)} |x_3|\right) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \bar{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \varepsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \bar{e}_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp\left(i\gamma_p^{(2)} |x_3|\right) \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \bar{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \bar{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь «+» соответствует $+\infty$, «-» соответствует $-\infty$; $\bar{e}_{1,2,3}$ – орты в декартовой системе координат; $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi_p(x_1, x_2)$ – полные системы собственных значений и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана соответственно. В выражении (2) $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$ ($k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $\nabla_2 \equiv \bar{e}_1 \partial / \partial x_1 + \bar{e}_2 \partial / \partial x_2$). Для коэффициентов разложений (2) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), p \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для всех $m \in N$.

Условия (2) с физической точки зрения означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Усло-

вия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность их почленного дифференцирования по x_j любое число раз.

Для $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ должны выполняться краевые условия на стенках волновода:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие в (4) следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для $u \in H^1(P)$ существуют граничные значения из пространства $H^{1/2}(\partial P)$ в смысле теории следов. Почти везде на ∂P определен вектор нормали.

Пусть также $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ ($\hat{I}$ – единичный тензор):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}^0 \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (6)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через $\mathbf{j}_E^0$ с помощью введенного ниже тензора Грина. Решения не обязаны удовлетворять условиям на бесконечности. Например, $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ могут быть ТМ- или ТЕ-модой этого волновода.

Компоненты диагонального тензора Грина $\hat{G}_E$ представляют собой фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в P с коэффициентом $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$. Для этих компонент выполняются краевые условия первого или второго рода на поверхности волновода ∂P , обеспечивающие обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода. Компоненты тензора Грина имеют вид [1]

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2,$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2,$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2.$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\operatorname{Im} \gamma_{nm} \geq 0$ и $\operatorname{Re} \gamma_{nm} \geq 0$, если

$\text{Im } \gamma_{nm} = 0$. Здесь k_0 – волновое число свободного пространства, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$; ω – круговая частота.

Решение поставленной задачи, описанной выше, сводится к интегро-дифференциальному уравнению [1] относительно поля $\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе.

2. Решение обратной краевой задачи

Будем рассматривать изотропный случай. Пусть $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon$, ε – константа, которую мы будем определять (эффективная диэлектрическая проницаемость образца) [4, 10, 12]. Предположим, что $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что $\text{Im } \gamma_1^{(2)} = 0$, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$ и $\text{Im } \gamma_p^{(j)} > 0$ для всех p, j , за исключением $p = 1$ и $j = 2$. Пусть падающее поле имеет вид

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3},$$

где $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда распространяющейся волны. Тогда в (2) $\psi_1 = \cos \pi x_1 / a$. Следовательно, $G_E^1 \rightarrow 0$ и $G_E^2 \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$. Мы также получаем

$$G_E^2 - \frac{1}{ab \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} |x_3 - y_3|} \rightarrow 0,$$

равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$. Затем мы имеем $\text{div } \hat{G}_E \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$ (потому что $\frac{\partial G_E^2}{\partial x_2} \rightarrow 0$ равномерно по $y \in Q$ при $x_3 \rightarrow -\infty$). Вычислив предел при $x_3 \rightarrow -\infty$ в (2), получим уравнение

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q G_E^2(r) \left(\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] E(y) \cdot e_2 \right) dy, x \in P \setminus Q, \quad (9)$$

принимая во внимание условие на бесконечности при $x_3 \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + e_2 Q_1^{(-)} e^{i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} = \\ e_2 A^{(+)} e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} + \\ + \frac{k_0^2 e_2}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)}(x_3 - y_3)} \left(\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] E(y) e_2 \right) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этого следует асимптотическое уравнение:

$$Q_1^{(-)} = k_0^2 \frac{1}{b\gamma_{10} i\pi\omega\mu_0} \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_1^{(2)} y_3} \left(\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] E(y) e_2 \right) dy. \quad (11)$$

Мы предполагаем, что коэффициент $Q_1^{(-)}$ известен из эксперимента. Уравнение (11) – это дополнительное условие, из которого будет определяться диэлектрическая проницаемость материала. Коэффициент $Q_1^{(-)}$ зависит от круговой частоты ω .

Обратная задача определения тензорной диэлектрической проницаемости образца материала, помещенного в волновод, состоит в том, чтобы найти проницаемость по известному коэффициенту отражения $Q_1^{(-)} = Q_1^{(-)}(\omega)$, измеренному на различных частотах.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (12)$$

где

$$C = \frac{i\pi\omega\mu_0 b\gamma_{10} Q_1^{(+)}}{k_0^2}; \quad (13)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_1^{(2)} y_3}, \quad (14)$$

а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (15)$$

Подставляя (12) и (14) в формулу (9), мы получаем нелинейное объемное интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^0(x)) &= k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем линейный интегральный оператор:

$$A_0 \mathbf{E} := k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{E}(y) dy. \quad (17)$$

Перепишем уравнение (17) в операторной форме:

$$\frac{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}{C} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^0) = A_0 \mathbf{E}. \quad (18)$$

Пусть $\tilde{A}^{(+)} = A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a}$, $\tilde{C} = \frac{C}{\tilde{A}^{(+)}}$ и

$$r_* = \left(\frac{\|A_0 \bar{\mathbf{f}}\|^2}{\|A_0\|^2} + \frac{\|A_0 \mathbf{f}\| \|(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})\|}{\|A_0\| \|\mathbf{f}\|} \right)^{1/2} - \frac{\|A_0 \bar{\mathbf{f}}\|}{\|A_0\|}. \quad (19)$$

Теорема. Пусть выполнены условия $(\bar{f}, f) \neq 0$ и

$$|\tilde{C}| < F \equiv \left\| (\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f}) \right\| \frac{\left(1 - \frac{2r_* \|\mathbf{f}\|}{\|(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})\|} \right)}{\|A_0\|}. \quad (20)$$

Тогда существует и единственно решение нелинейного объемного интегрального уравнения (16). Также существует и единственно решение обратной краевой задачи, полученное по формуле (12). Кроме того, приближенное решение уравнения (16) может быть найдено посредством итерационного процесса

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)}(\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{f})} \left\{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C(A_0 \mathbf{E}_n) \right\}, \quad (21)$$

который сходится для любого начального приближения $\mathbf{E}_0 \in \overline{S_{r_*}(\mathbf{E}^0)}$ со скоростью геометрической прогрессии, где r_* определяется формулой (19). Теорема может быть доказана аналогично [1].

Условие (14) имеет место, если величина $Q_1^{(-)}$ достаточно мала. С физической точки зрения это означает, что амплитуда прошедшей волны не сильно отличается от амплитуды падающей волны.

Рассмотрим схему итерационного процесса (21) для решения нелинейного интегрального уравнения (16). При $n = 0, 1, \dots$ на каждом шаге необхо-

димо (численно) вычислять действие линейного объемного сингулярного интегрального оператора A_0 . Алгоритм вычислений описан в [13]. Алгоритм суммирования рядов представлен в [1]. В качестве начального приближения естественно взять $E_0 = E^0$. После решения уравнения (16) с заданной точностью с помощью итерационной процедуры (21) по формулам (10)–(12) находим неизвестную эффективную диэлектрическую проницаемость ε .

3. Численные результаты

Аналитическое решение задачи дифракции на секции в волноводе было получено в [14]. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_1$ и найдем коэффициент B по формуле

$$B = 2iA \frac{\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right) \sin(\gamma c)}{\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{-i\gamma c} - \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{i\gamma c}},$$

где $\gamma_1 = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$, $\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$.

Возьмем в качестве коэффициента $Q_1^{(-)}$, при решении обратной краевой задачи итерационным методом – коэффициент B , и будем вычислять ε . На рис. 1–3 представлены полученные результаты, которые демонстрируют сходимость итерационного метода в пределах области сходимости

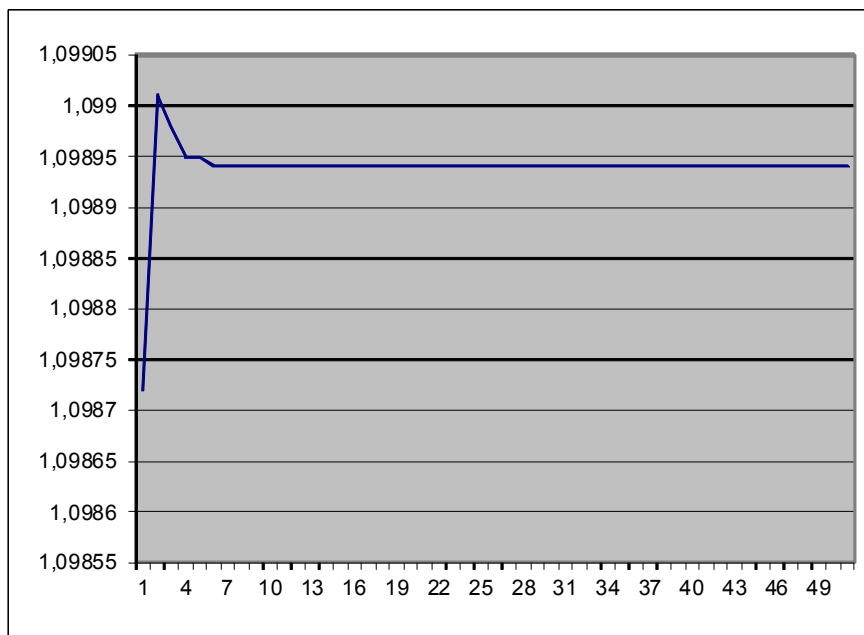


Рис. 1. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ε от числа итераций n при значениях параметров: $\varepsilon_1 = 1,1$; $a = 2,274$; $b = 1,004$; $c = 0,982$; $k_0 = 2,8636$

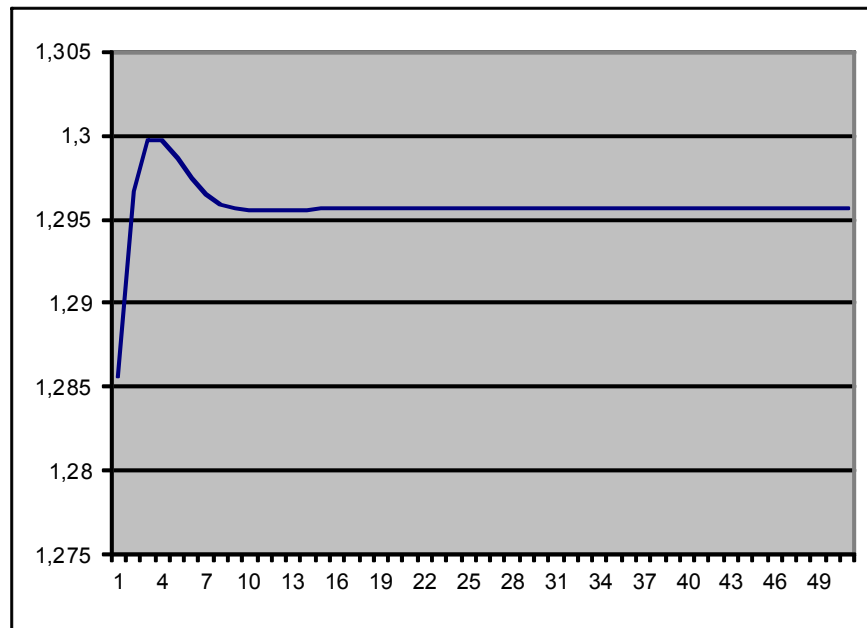


Рис. 2. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ϵ от числа итераций n при значениях параметров $\epsilon_1 = 1,3$; $a = 2,274$; $b = 1,004$; $c = 0,982$; $k_0 = 2,8636$

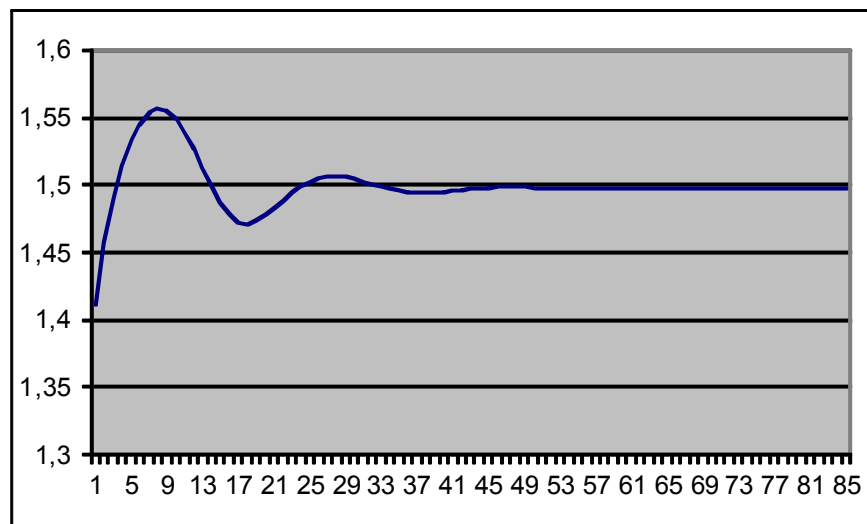


Рис. 3. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости ϵ от числа итераций n при значениях параметров $\epsilon_1 = 1,5$; $a = 2,274$; $b = 1,004$; $c = 0,982$; $k_0 = 2,8636$

Список литературы

1. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 39–54.

2. **Kobayashi, K.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / Kobayashi K., Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G. // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. – 2009. – V. 70, № 3. – P. 969–983.
3. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
4. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Миронов. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1587–1597.
5. **Smirnov, Yu. G.** Existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of the complex permittivity reconstruction of a dielectric body in a waveguide / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov // *Inverse Problems*. – 2010. – V. 26. – P. 1–14.
6. **Smirnov, Y.** Analysis of Inverse Scattering in a Waveguide using the Method of Volume Singular Integral Equation / Y. Smirnov, Y. Shestopalov, D. Mironov // *URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010)*. – Berlin, Germany, 2010. – P. 532–534.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, Д. И. Васюнин // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2009. – № 3. – С. 71–87.
8. **Solymar, L.** Waves in Metamaterials / L. Solymar, E. Shamonina. – New York : Oxford University Press, 2009. – 384 p.
9. **Zharova, N. A.** Nonlinear Transmission and Spatiotemporal Solutions in Metamaterials with Negative Refraction / N. A. Zharova, I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, Yu. S. Kivshar // *Optics Express*. – 2005. – V. 13, № 4. – P. 1291–1298.
10. **Shestopalov, Yu. V.** Development of Mathematical Methods for Reconstructing Complex Permittivity of a Scatterer in a Waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // *Proceedings of 5th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering, October 22–25. – Antalya, Turkey, 2008*.
11. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // *Вычислительные методы и программирование*. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
12. **Shestopalov, Yu. V.** Volume Singular Integral Equations Method for Determination of Effective Permittivity of Meta- and Nanomaterials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // *Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2008) (July 2–6 2008)*. – Cambridge, USA, 2008. – P. 291–292.
13. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998. – 160 с.
14. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2010. – № 2. – С. 44–53.

Гришина Елена Евгеньевна
аспирант, Пензенский
государственный университет
E-mail: mmm@pnzgu.ru

Grishina Elena Evgenyevna
Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.3

Гришина, Е. Е.

Численный метод решения обратной задачи восстановления эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения / Е. Е. Гришина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 75–84.